

# 多变量 ARMA 模型与大跨结构随机风场的数值仿真\*

周志勇 项海帆 陈艾荣

同济大学土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092

**摘要** 引入自回归滑动平均(ARMA)模型的反问题理论模拟随机风场. 针对大跨结构进行了数值仿真试验, 数值试验表明该方法具有速度快、精度高的优点.

**关键词** 自回归滑动平均(ARMA)模型 随机风场 数值仿真

自回归滑动平均(ARMA)模型是时间序列方法中最基本、实际应用最广的模型. 它具有随机差分方程的形式, 是一类特殊的离散线性系统. 本文引入 ARMA 模型的反问题理论模拟随机风场, 其计算量仅为求解一高阶方程组, 且可处理目标风谱沿结构高度变化的情况. 在数值模拟中, ARMA 模型相当于一组数字滤波器, 将现时刻样本的响应值表示为过去若干时刻样本的响应值与白噪声激励值的线性组合, 从而将白噪声转变成近似具有目标谱密度或相关函数的离散随机过程或场. 该方法的一个优点是可以用最少数目的参数去近似一个目标谱密度矩阵, 是一种比基于三角级数迭加的谐波合成法更有效的数值模拟方法<sup>[1]</sup>.

## 1 时间序列分析的多变量 ARMA 模型

### 1.1 高阶自回归(Auto regressive)模型

假设具有  $n$  个变量的一维随机矢量过程  $Y$  是平稳、零均值、各态历经的 Gauss 过程, 设其第  $r$  个样本函数  $Y_r$  为

$$Y_r = \{y_1(r\tau), y_2(r\tau), \dots, y_n(r\tau)\}^T, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

式中,  $\tau$  为采样时间, 满足 Nyquist 关系:  $\tau = \frac{\pi}{\omega_c}$ ,  $\omega_c$  是截止频率.

具有  $n$  个变量的一维随机矢量过程的 AR( $m, m$ )( $m$  为 AR 系统的阶数)模型响应的第  $r$  个样本  $Y_r$  可由前  $m$  个响应样本及当前激励样本按式(2)确定<sup>[2]</sup>,

$$\sum_{i=0}^m A_i \times Y_{r-i} = B_0 \times W_r, \quad A_0 = I_n, \quad (2)$$

式中,  $A_i, B_0$  分别是  $n \times n$  系数矩阵;  $I_n$  是  $n \times n$  单位矩阵;  $W_r$  是平稳零均值的限幅宽带白噪声矢量序列:  $W_r = \{w_1(r\tau), w_2(r\tau), \dots, w_n(r\tau)\}^T (r = 1, 2, \dots)$ , 其相关函数  $R_{ww^T}(k)$  的表达式

2000-08-24 收稿, 2001-01-12 收修改稿

\* 国家自然科学基金重大项目(批准号: 59895410)及教育部优秀年轻教师基金联合资助

为  $\mathbf{R}_{ww}^T(k) = 2\omega_c \mathbf{J}_n \delta_k$  ( $\delta_k = 1, k = 0; \delta_k = 0, k \neq 0$ ).

以  $\mathbf{Y}_{r-k}^T$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) 右乘方程(2)并取数学期望得

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{A}_i \mathbf{E}(\mathbf{Y}_{r-i} \times \mathbf{Y}_{r-k}^T) = \mathbf{B}_0 \mathbf{E}(\mathbf{W}_r \times \mathbf{Y}_{r-k}^T) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \mathbf{R}_{YY}^T(i-k) = \mathbf{R}_{WY}^T(k) = -\mathbf{R}_{YW}^T(k). \quad (3)$$

上式也称为线性 Yule-Walker 方程组. 式中,  $\mathbf{R}_{YY}^T(l)$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) 是  $n \times n$  矩阵, 表示在时滞  $l$  时的互相关矩阵. 解方程组(3), 即可获得系数矩阵  $\mathbf{A}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

以  $\mathbf{Y}_r^T$  ( $r = 0, 1, 2, \dots, m$ ) 右乘方程(2)并取数学期望得

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{A}_i \mathbf{R}_{YY}^T(i) = \mathbf{B}_0 \mathbf{R}_{WY}^T(0) = \mathbf{B}_0 \mathbf{R}_{YW}^T(0). \quad (4)$$

以  $\mathbf{W}_r^T$  ( $r = 1, 2, \dots, m$ ) 右乘方程(2), 并取数学期望得

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{A}_i \mathbf{R}_{YW}^T(i) = \mathbf{B}_0. \quad (5)$$

当  $i > 0$  时, 显然存在  $\mathbf{R}_{YW}^T(i) = 0$ , 因此, 由(5)式有  $\mathbf{R}_{YW}^T(0) = \mathbf{B}_0$ , 将其代入(4)式可得

$$\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T = \sum_{i=0}^m \mathbf{A}_i \mathbf{R}_{YY}^T(i). \quad (6)$$

不失一般性, 设  $\mathbf{B}_0$  为下三角矩阵, 通过(6)式等号右边矩阵的乔列斯基分解可获得  $\mathbf{B}_0$  值. 以  $\mathbf{W}_{r-k}^T$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, m$ ) 右乘方程(2)并取数学期望, 有

$$\mathbf{R}_{YW}^T(-k) = -\sum_{i=1}^k \mathbf{A}_i \mathbf{R}_{YY}^T(i-k). \quad (7)$$

根据  $\mathbf{R}_{YW}^T(0) = \mathbf{B}_0$ , 由方程(7)通过递归算法可获得  $\mathbf{R}_{YW}^T(-k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

## 1.2 低阶自回归滑动平均 (ARMA) 模型

具有  $n$  个变量的一维随机矢量过程的 ( $q, q$ ) 阶 ARMA 模型响应的第  $r$  个样本  $Y_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) 可由前  $q$  个响应样本及  $q$  个激励样本按式(8)计算<sup>[3]</sup>

$$\sum_{i=0}^q \mathbf{A}_i^* \times Y_{r-i} = \sum_{i=0}^q \mathbf{B}_i^* W_{r-i}, \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{A}_i^*$ ,  $\mathbf{B}_i^*$  分别是  $n \times n$  系数矩阵. ARMA 模型的传递函数为  $H^*(\omega) = \left[ \sum_{k=0}^q e^{i\omega k T} \mathbf{A}_k^* \right]^{-1} \left[ \sum_{k=0}^q e^{i\omega k T} \mathbf{B}_k^* \right]$  ( $i = \sqrt{-1}$ ), 由 ARMA 模型确定的样本的谱密度矩阵 (ARMA 谱) 为

$$S(\omega) = \bar{H}^*(\omega) H^{*T}(\omega) = [s_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

式中,  $\bar{H}^*(\omega)$  为  $H^*(\omega)$  共轭函数.

通过 AR 系统与 ARMA 系统的响应自相关与响应-激励互相关的匹配可导致如下确定系数矩阵  $\mathbf{A}_i^*$ ,  $\mathbf{B}_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) 的线性方程组<sup>[2~6]</sup>

$$\sum_{i=0}^q \mathbf{A}_i^* * \mathbf{R}_{YY}^T(i-k) = \sum_{i=0}^q \mathbf{B}_i^* \mathbf{R}_{YW}^T(i-k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{B}_0^* = \mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{A}_0^* = \mathbf{I}_n$ . 解方程组(10), 可获得系数矩阵  $\mathbf{A}_i^*$ ,  $\mathbf{B}_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) 的值, 因此通过与高阶 AR( $m, m$ ) 模型的匹配, 低阶 ARMA( $q, q$ ) 模型便确定了.

## 2 随机风场的数值仿真算例

针对一跨为 600 m 的大跨结构, 利用本文方法模拟了沿跨度方向水平分布, 间距为 100 m 的 6 个点的顺风向脉动风速. 6 个点的离地高度均为 50 m.  $C_z = 7$ ,  $U(z) = 40$  m/s, 截断频率为 10 rad/s, 采样时间为 0.314 s.

水平脉动风速谱采用 Kamaik 谱, 其形式为<sup>[7]</sup>

$$\frac{nS_n(n)}{U_*^2} = \frac{200f}{(1 + 50f)^{5/3}}, f = \frac{nz}{U(z)},$$

$$U_* = KU(z)/\ln\left(\frac{z}{z_0}\right), K = 0.4, \quad (11)$$

频域相干系数采用 Davenport 相干函数

$$\rho(z, z', \omega) = \rho(\Delta_{ij}, \omega) = \exp\left\{-C_z \frac{\omega |z - z'|}{2\pi v_z}\right\}, \Delta_{ij} = |z_i - z_j|. \quad (12)$$

根据(11)式, (12)式可得空间两点(i, j)的交叉频谱为

$$S_{ij}^0(\omega) = \sqrt{S_{z_i}(\omega) * S_{z_j}(\omega)} * \rho(\Delta_{ij}, f) = S_v(\omega) * \rho(\Delta_{ij}, \omega). \quad (13)$$

将数据代入(13)式, 则有

$$S_{ij}^0(\omega) = \frac{1163}{(1 + 9.95\omega)^{5/3}} \{\exp(-3.98\omega)\}^{|j-i|}. \quad (14)$$

本文所用的目标频谱即为(14)式, 试算发现  $m = 100, q = 6$  的精度是足够的.

图 2 画出了空间 6 个采样点的 ARMA 自谱((9)式)与目标自谱的曲线. 图 3 画出了(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)点的 ARMA 互谱曲线与目标互谱曲线. 从图 2、图 3 可以看出, ARMA

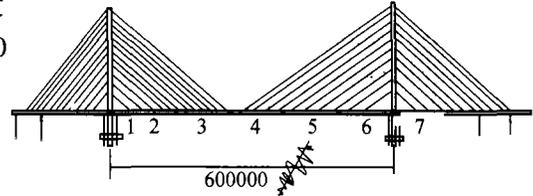


图 1 大跨结构随机风场数值仿真物理模型示意图(单位: mm)

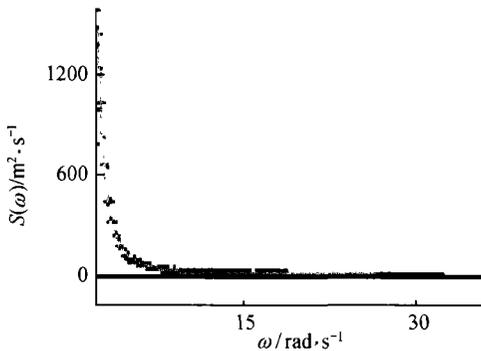


图 2 采样点的 ARMA 自谱与目标自谱  
—△—目标值; —ARMA 谱值

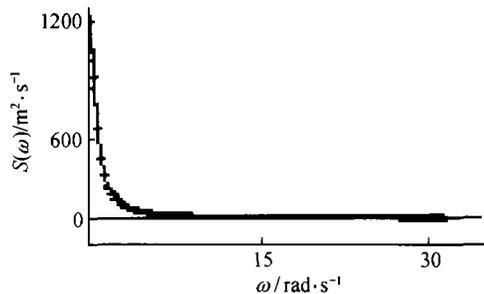


图 3 采样点的 ARMA 互谱与目标互谱  
—△—目标值; —ARMA 谱值

谱与目标谱重合地很好. 图 4 给出了(1, 5)点互谱的虚部, 可以看出, 与实部相比, 虚部可以忽略. 图 5 给出了由所模拟的脉动风速样本曲线通过(15)式<sup>[8]</sup>计算的 1, 3, 5 点的自相关函数图, 可以看出由样本序列得到的自相关函数与目标自相关函数吻合的很好, 但吻合程度没有图 2、图 3 高, 这是由于作为输入激励源的限幅白噪声并非严格的理想白噪声所致. 图 6 给出了

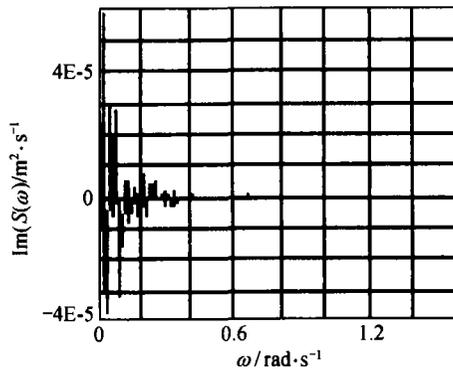
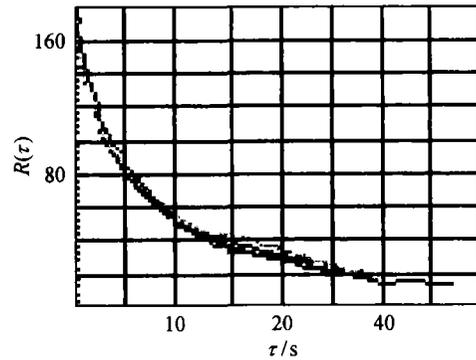
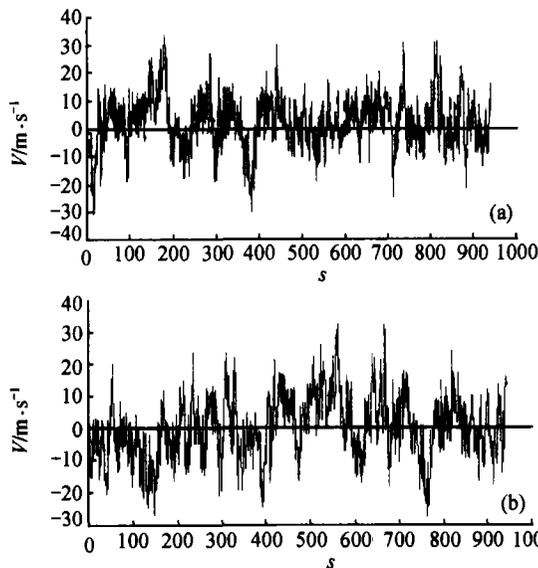


图 4 采样点(1,5)的 ARMA 互谱的虚部

图 5 自相关函数比较  
—△—目标值; - - - 模拟值图 6 脉动风速时程样本曲线  
(a) 模拟点 1; (b) 模拟点 3

点 1,3 的脉动风速时程样本曲线.

$$R_{YY^T}(k) = \frac{1}{N-K} \sum_{r=1}^{N-K} Y_r \times Y_{r+k}^T, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

式中,  $N$  为采样数.

### 3 结论

高阶 AR 系统的系数矩阵通过求解线性方程组而得, 低阶 ARMA 系统系数矩阵通过高阶 AR 系统由频率域误差极小的准则匹配而得, 这一步需要求解低阶的线性方程组, 这对计算机而言是极易处理的. 风速时程样本由低阶公式递推获得, 其计算量是极小的. 本文算例表明, 无论从与目标谱密度矩阵的匹配精度还是计算所费时间而言, ARMA 模型不失为模拟大跨结构随机风场的一种较好方法.

### 参 考 文 献

- 1 朱位秋. 随机振动. 北京: 科学出版社, 1998
- 2 Mignolet M P, et al. Recursive simulation multivariate random processes. Part1. J Appl Mech, 1984, 54: 681
- 3 Spanos P-T D, et al. Numerical synthesis of trivariate velocity realization of turbulence. J Non-Linear Mechanics, 1986, 21(4): 269
- 4 Friot E, et al. Fast synthesis of ARMA models for the recursive simulation of scalar random process with a given target spectrum. Journal of Sound and Vibration, 1994, 170(3): 415
- 5 Shionozuka M, et al. Digital, simulation of random processes and its applications. Journal of Sound and Vibration, 1972, (1): 111
- 6 Deodatis G. Simulation of ergodic multivariate stochastic processes. Journal of Engineering Mechanics, 1996, 122(8)
- 7 曹映泓, 等. 大跨度桥梁结构随机风场的模拟. 土木工程学报, 1998, 31(3)
- 8 Naganuma T, et al. ARMA model for two-dimensional processes. J Eng Mech, 1987, 113(2): 234